Matière : . Maths.

Destinataires : **Terminales**

EXERCICE MATHS

Sujet : **MATHEMATIQUES GENERALES (TS1, TS2 et TL)**
Exercice et problèmes corrigés

Auteur : **. Mamadou Amouzou .**

Date de publication : 3 mai 2006

Sources :

SOMMAIRE

1 <u>EPREUVE :</u>

1.1 <u>EXERCICE 1</u> :(Problème du banquier)

1- Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (***C***) de f au point d'abscisse 0.
Nous admettrons par la suite que lorsque x est proche de 0, la courbe (***C***) est suffisamment proche de sa tangente (T) pour prendre x comme approximation de $\ln(1+x)$.

2- Un banquier en veine de confidence affirme : « pour estimer le nombre d'année qu'il faut à un capital placé à intérêts composés pour doubler, il suffit de diviser 70 par le taux d'intérêts ». Nous allons justifier cette pratique.

a- Montrer que le nombre d'années, n, nécessaires au doublement d'un capital placé à t % d'intérêt composés vérifie :

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}.$$

b- On pose $N = \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}$. En considérant que $\frac{t}{100}$ est proche de 0, donner en utilisant 1-, une approximation de $\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)$.

c- En déduire que $N \times t \approx 70$.

d- <u>Application numérique</u> : Calculer d'abord avec la formule du a- puis avec la méthode du banquier, le nombre d'années nécessaires au doublement d'un capital placé à 8 %.

1.2 PROBLEME :

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x+1) + 2x$ et (***C$_g$***) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1- a- Calculer les limites de g aux bornes de son assemble de définition et en déduire une asymptote à (***C$_g$***).
b- Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

2- Calculer g(0) et en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

3- Tracer (***C$_g$***) et son asymptote.

4- a- Montrer que la fonction G, définie sur $]-1; +\infty[$ par $G(x) = x\ln(x+1)+\ln(x+1)-x+x^2$, est une primitive de g.
b- Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 g(x)dx$.

<u>Partie B</u>

Soit f la fonction définie par $f(x) = x(e^{x^2}-1)$. et (***C$_f$***) sa courbe représentative, sur l'intervalle $[-2; 2]$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- a- Montrer que la dérivée de est f définie $f'(x) = e^{x^2}-1+2x^2e^{x^2}$. Quel est le signe de $e^{x^2}-1$? En déduire que pour réel x, $f'(x)$ est positif ou nul.

b- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de f sur IR et tracer ($\mathcal{C}_f$).

2- Soit I_2 l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$; montrer que $I_2 = \frac{e}{2} - 1$.

Partie C

On admettra que, sur $[0; 1]$, la fonction f est positive et $f \leq g$.
Soit $\mathcal{A}$ la surface délimitée, sur le graphique, par les deux courbes ($\mathcal{C}_f$) et ($\mathcal{C}_g$) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calculer la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{A}$, exprimée en cm², puis sa valeur approchée décimale arrondie à
10^{-2} près.

2 CORRIGE

2.1 EXERCICE 1 :

1- $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ d'où :

$\boxed{\text{(T) : } y = x}$

2- a- Soit C_n le capital après n années de placement, on a :

$$C_n = C_{n-1} + \frac{t}{100}C_{n-1} = \left(1+\frac{t}{100}\right)C_{n-1}$$

Donc $\left(C_{n-1}\right)$ est une suite géométrique de raison q = $\left(1+\frac{t}{100}\right)$ et de premier terme C_0 ; ainsi :

$$C_n = \left(1+\frac{t}{100}\right)C_0 .$$

Par suite $C_n \geq 2C_0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{t}{100}\right) \geq 2$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) \geq \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}}$$

b- $\frac{t}{100} \approx 0$ donc d'après 1- $\ln\left(1+\frac{t}{100}\right) \approx \frac{t}{100}$.

c- Ainsi $N \approx \frac{\ln 2}{\frac{t}{100}}$ donc $N \times t \approx 100\ln 2$ ou encore $\boxed{N \times t \approx 70}$

d- ***1^ère^méthode :*** $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1+0,08)}$; donc $n \geq 9,006$ d'où $\boxed{n \approx 9}$

2^ème^méthode : $N \times 8 \approx 70$; donc $N \approx 8,75$ d'où $\boxed{N \approx 9}$

2.2 PROBLEME :

Partie A

1- a- $\boxed{\lim_{x\to -1^+} g(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$

Ainsi la droite d'équation x =-1 A.V à ($\boldsymbol{C_g}$).

3/4

b- $g'(x) = \frac{2x+3}{x+1}$; or $x+1 > 0$ et $2x+3 > 0$ sur D_g donc $g'(x) > 0$

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2- g(0) = 0 donc $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

3- ($\boldsymbol{C_g}$) et asymptote (voir à la fin).

4- a- $G'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} -1+2x$

$= \ln(x+1) + 2x$

$= g(x)$ <u>cqfd</u>

b- $I_1 = \left[\ G(x)\ \right]_0^1$ = G(1) – G(0) ; d'où $\boxed{I_1 = 2\ln 2}$

Partie B

1- a- $f'(x) = e^{x^2}-1 + 2x^2e^{x^2}$

or $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{x^2}-1 \geq 0$.

On a aussi $x^2 \geq 0$ et $e^{x^2} > 0$ donc $x^2e^{x^2} \geq 0$; $\forall x \in IR$

Par suite $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b- $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Tracer de ($\boldsymbol{C_f}$) voir suite.

2- $I_2 = \int_0^1 x e^{x^2} dx - \int_0^1 x dx = \left[\frac{e^{x^2} - x}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2}$; d'où $\boxed{I_2 = \frac{e}{2} - 1}$

Partie C

$\mathcal{A} = 8\text{cm}^2 \int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = 8\text{cm}^2 (I_1 - I_2)$ donc $\boxed{\mathcal{A} = 8\left(2\ln 2 + 1 - \frac{e}{2}\right) \text{cm}^2}$

Et $\boxed{\mathcal{A} \approx 8{,}16 \text{ cm}^2}$